

MN I

Examen III

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

MN I

Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Teresa Encarnación Pérez Fernández.

Descripción Prueba 2. Temas 3 y 4.

Fecha 7 de junio de 2022.

Ejercicio 1 (1.5 puntos). Determine $s'(0)$ y $s'(2)$ para que la siguiente expresión defina un spline cúbico de extremo sujeto:

$$s(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 + \alpha x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^3 + \beta x^2 + 2x + \gamma, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos la derivada. Por el carácter local de la derivabilidad:

$$s'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x + \alpha, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x^2 + 2\beta x + 2, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$s''(x) = \begin{cases} 12x + 4, & 0 \leq x \leq 1, \\ 6x + 2\beta, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

Para que sea un spline cúbico, hemos de tener en primer lugar que sea continua. Por tanto,

$$5 + \alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} s(x) = \beta + 3 + \gamma \implies -\alpha + \beta + \gamma = 2$$

Además, como es de clase 1, ha de ser derivable con derivada continua. Por tanto,

$$10 + \alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} s'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} s'(x) = 5 + 2\beta \implies -\alpha + 2\beta = 5$$

Además, como es de clase 2, su segunda derivada ha de ser continua. Por tanto,

$$16 = \lim_{x \rightarrow 1^-} s''(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} s''(x) = 6 + 2\beta \implies \beta = 5$$

Por tanto, para que sea un spline ha de ser:

$$\alpha = \beta = 5 \quad \gamma = 2$$

Por tanto, para que sea un spline cúbico de extremo sujeto ha de ser:

$$s'(0) = 5 \quad s'(2) = 34$$

Ejercicio 2 (1.5 puntos). Usando aritmética de tres cifras por redondeo, calcule el polinomio de interpolación para los siguientes datos: $f(0,8) = 0,224$, $f'(0,8) = 2,17$, $f(1,0) = 0,658$, $f'(1,0) = 2,04$.

x_i	0,8	1,0
f_i	0,224	0,658
f'_i	2,17	2,04

Calculo la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$			
0,8	0.224			
0,8	0,224	2.17		
1	0,658	2,17	0	
1	0,658	2,04	-0,65	-3,25

Por tanto, tengo que el polinomio de interpolación es:

$$p_3(x) = 0,224 + 2,17(x - 0,8) - 3,25(x - 1)(x - 0,8)^2$$

Ejercicio 3 (1.5 puntos). Dada la función $f(x) = \frac{x^4-x}{4}$ definida en el intervalo $[0, a]$, $a > 0$, determine el número mínimo de nodos equiespaciados n (abcisas) que se deben tomar en el intervalo $[0, a]$ para que el error de interpolación entre cada dos nodos consecutivos sea menor que un $\varepsilon > 0$ dado.

Tenemos que $f \in \mathbb{P}_4$, por lo que queda definido por 5 puntos. Es decir, tomando 5 puntos, el polinomio de interpolación pertenecerá a \mathbb{P}_4 y, de hecho, será f . Por tanto, el error de interpolación será nulo, ya que se habría interpolado el mismo polinomio.

De hecho, al tomar 5 puntos tenemos que el error de interpolación es:

$$e(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{i=0}^4 (x - x_i) \quad \xi \in [a, b]$$

No obstante, tenemos que $f^{(5)}(x) = 0 \forall x$, por lo que como podemos ver, el error es nulo.

Ejercicio 4 (1.5 puntos). Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ 2 & x > c \end{cases}$$

Sabemos que la recta que mejor aproxima a $f(x)$ por mínimos cuadrados continuos en el intervalo $[0, 3]$ es $p(x) = \frac{8}{9}x$. Calcule c .

Al ser la aproximación por mínimos cuadrados continua en el intervalo $[0, 3]$, tomamos el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^3 f(x)g(x) dx$$

Buscamos la mejor aproximación en $\mathbb{P}_1 = \mathcal{L}\{1, x\}$. Calculamos los productos escalares:

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 3 & \langle 1, x \rangle &= \frac{9}{2} & \langle x, x \rangle &= 9 \\ \langle f, 1 \rangle &= \int_c^3 2 dx = 2(3 - c) & \langle f, x \rangle &= \int_c^3 2x dx = 9 - c^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la mejor aproximación es $p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{P}_1$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9/2 \\ 9/2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3 - c) \\ 9 - c^2 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que la mejor aproximación es $p(x) = \frac{8}{9}x$, tenemos que $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{8}{9}$. Por tanto:

$$\begin{cases} \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{9} = 6 - 2c \implies 4 = 6 - 2c \\ 9 \cdot \frac{8}{9} = 9 - c^2 \implies 8 = 9 - c^2 \end{cases}$$

Por tanto, de ambas ecuaciones deducimos que $c = 1$.

Ejercicio 5 (4 puntos). Se considera el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{-1} f(x)g(x) dx + f(0)g(0) + \int_1^2 f(x)g(x) dx.$$

1. **(1.25 puntos)** Calcule los tres primeros polinomios ortogonales.

Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{P}_n = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ y buscamos una base ortogonal $\mathcal{B}_o = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Partimos de $e_1 = 1$, y usando el algoritmo de Gram-Schmidt, tenemos que:

$$e_2 = x - \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1$$

$$\langle x, 1 \rangle = \int_{-2}^{-1} x dx + 0 + \int_1^2 x dx = 0$$

Por tanto, definimos $e_2 = x$. Calculamos ahora e_3

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 - \frac{\langle x^2, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} \cdot e_2$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + 0 + \int_1^2 x^2 dx = \frac{14}{3} \quad \langle x^2, x \rangle = \int_{-2}^{-1} x^3 dx + 0 + \int_1^2 x^3 dx = 0$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-2}^{-1} 1 dx + 1 + \int_1^2 1 dx = 3$$

Por tanto, $e_3 = x^2 - \frac{14}{9}$. Es decir, los tres primeros polinomios ortogonales son:

$$\left\{ 1, x, x^2 - \frac{14}{9} \right\}$$

2. **(1.25 punto)** Utilizando el apartado anterior, proporcione la parábola $u(x)$ mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = x^3$.

Sea $\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\{1, x, x^2 - \frac{14}{9}\}$, y consideramos $u(x) = a_1 + a_2x + a_3(x^2 - \frac{14}{9})$.

Calculamos productos escalares necesarios, sabiendo que se trata de una base ortogonal:

$$\langle 1, 1 \rangle = 3 \quad \langle x, x \rangle = \frac{14}{3}$$

$$\langle f, 1 \rangle = 0 \quad \langle f, x \rangle = \frac{62}{5} \quad \left\langle f, x^2 - \frac{14}{9} \right\rangle = 0$$

Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

$$a_i = \frac{\langle e_i, f \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

Por tanto, $a_1 = a_3 = 0$. Además,

$$a_2 = \frac{\langle x, f \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\frac{62}{5}}{\frac{14}{3}} = \frac{93}{35}$$

Es decir, la mejor aproximación en \mathbb{P}_2 es

$$u(x) = \frac{93}{35}x$$

3. **(1 punto)** Compruebe que $f(x) - u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

Por ser u la mejor aproximación de f , tenemos que:

$$\|f - u\| \leq \|f - p_2\| \implies \|f - u\|^2 \leq \|f - p_2\|^2 \quad \forall p_2 \in \mathbb{P}_2$$

Tomamos $g \in \mathbb{P}_2$, y sea $p_2 = u + \lambda g \in \mathbb{P}_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, como $p_2 \in \mathbb{P}_2$, tenemos que:

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u - \lambda g\|^2 = \langle f - u - \lambda g, f - u - \lambda g \rangle = \|f - u\|^2 - 2\lambda \langle f - u, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2$$

Por tanto,

$$0 \leq -2\lambda \langle f - u, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in \mathbb{P}_2.$$

Considerando la expresión anterior como una parábola en la incógnita λ , tenemos:

$$\Delta = 4(\langle f - u, g \rangle)^2 \geq 0$$

Por tanto, para que la parábola siempre sea positiva, no puede tener dos raíces. Por tanto, $\Delta = 0$, lo que implica que:

$$\langle f - u, g \rangle = 0 \quad \forall g \in \mathbb{P}_2$$

Por tanto, hemos demostrado que $f(x) - u(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual a dos.

4. **(0.5 puntos)** Interprete geoméricamente la distancia que induce este producto escalar.

Tenemos que:

$$d(u, v) := \|u - v\| = \sqrt{\int_{-2}^{-1} (u - v)^2(x) dx + (u - v)^2(0) + \int_1^2 (u - v)^2(x) dx}$$

Por tanto, la distancia es la raíz del área encerrada por ambas funciones entre $[-2, -1]$ y $[1, 2]$ y el cuadrado de las imágenes de las dos funciones en $x = 0$.

Por tanto, al minimizar mediante mínimos cuadrados, lo que buscamos es minimizar el área entre dichas funciones en los intervalos mencionados y minimizar la distancia en el punto $x = 0$.